1. Formálny systém (FS) a dôkaz vo formálnom systéme

Def.1.1 (Formálny systém)
Formálny systém je tvorený troma zložkami:
1. *Jazyk.* Z jeho symbolov sú vytvárame konečné postupnosti, nazývané *formuly* a *termy*.
2. *Axiómy*. Formuly, ktoré pokladáme za pravdivé tvrdenia bez potreby ich platnosť dokazovať.
3. *Odvodzovacie pravidlá*. Syntaktické pravidlá, ktoré umožňujú z jednej alebo viacej formúl vytvoriť ďalšie odvodené formuly.

Def.1.2 (Dôkaz vo formálnom systéme)
Dôkazom formuly $A=A_k$ vo formálnom systéme F voláme konečnú postupnosť formúl $A_0, A_1, \ldots A_k$, ak o každej A_i, $i\in 1\ldots k$ platí, že
a) A_i je axióma form. systému, alebo
b) $A'_0, A'_1, \ldots A'_m \vdash^P A_i$, tzn. A_i je záver podľa nejakého pravidla P systému F a premís $A'_0, A'_1, \ldots A'_m$, kde $A'_0, A'_1, \ldots A'_m$ sú spomedzi formúl $A_0, A_1, \ldots A_j$, $j<i$, alebo sú axiómami formálneho systému.

Počet členov postupnosti sa nazýva **dĺžka dôkazu**.

Def.1.3 (Teoréma formálneho systému)
Formula A je **teorémou formálneho systému** F, ak existuje jej dôkaz v F. Tiež hovoríme, že A je **dokázateľná**, resp. je **odvoditeľná** vo formálnom systéme a zapisujeme to ako $\vdash A$.

2. Formálny systém výrokovej logiky (VL)

Výroková logika je logika, kde *formuly* sú vytvárané z *atomických*, *elementárnych formúl* a *logických spojok*. O vnútornej štruktúre elementárnych formúl, tiež nazývaných *atómy*, nevieme nič, okrem toho, že ich vieme rozpoznať a rozlíšiť, prípadne určiť ich pravdivosť resp. nepravdivosť. Každý atóm je pravdivý alebo nepravdivý. Ako každý formálny systém aj systém výrokovej logiky pozostáva z jazyka, axióm a odvodzovacích pravidiel. Pre výrokovú logiku existuje viacero systémov, líšiacich sa prvkami jazyka, a počtom a formou axióm a odvodzovacích pravidiel. Podobné je to aj u iných logík.

Tu si uvedieme jeden konkrétny formálny systém výrokovej logiky.

Def.2.1 (Syntax jazyka VL)
Jazyk ***L(P)*** výrokovej logiky nad neprázdnou množinou P atomických formúl obsahuje **logické formuly** zostavené podľa nasledujúcich pravidiel
1. Každá formula A z P je logická formula
2. Ak α a β sú logické formuly, potom aj $\neg\alpha$, $\alpha\wedge\beta$, $\alpha\vee\beta$, $\alpha \rightarrow\beta$, $\alpha\leftrightarrow\beta$, (α) sú logické formuly.

Symboly $\neg$ (resp. $\overline{\ }$), $\wedge$ (resp. &), $\rightarrow$ (resp. $\supset,\Rightarrow$) a $\leftrightarrow$ (resp. $\Leftrightarrow$) sa nazývajú **propozicionálne spojky**, resp. symboly výrokových funkcií, resp. propozicionálne funkcie.

Okrem syntaxe pre jazyk definujeme aj sémantiku, tzn. význam. V prípade formúl výrokovej logiky na to využívame funkciu nazývanú **pravdivostné ohodnotenie**.

Def.2.2 (Sémantika VL)
Pravdivostné ohodnotenie atomických formúl jazyka $L(P)$ je každé zobrazenie $v:P \rightarrow \{t,f\}$, ktoré každej formule p z P priradí hodnotu t (pravda) alebo hodnotu f (pravda).
Pravdivostné ohodnotenie logických formúl jazyka $L(P)$ je každé zobrazenie $v^*:L(P) \rightarrow \{t,f\}$, definované nasledovne:
- $v^*(\alpha)= v(\alpha)$ ak α je z P.
- $v^*(\neg\alpha)=\begin{cases} t\ ak\ v^*(\alpha)=f \\ f\ inak \end{cases}$
- $v^*(\alpha\wedge\beta)=\begin{cases} t\ ak\ v^*(\alpha)=v^*(\beta)=t \\ f\ inak \end{cases}$

- $v^*(\alpha \vee \beta) = \begin{cases} f \; ak \; v^*(\alpha) = v^*(\beta) = f \\ t \; inak \end{cases}$
- $v^*(\neg\alpha) = \neg\, v^*(\alpha)$
- $v^*(\alpha\vee\beta) = v^*(\alpha)\vee v^*(\beta)$
- $v^*(\alpha\wedge\beta) = v^*(\alpha) \wedge v^*(\beta)$
- $v^*(\alpha\rightarrow\beta) = v^*(\alpha)\rightarrow v^*(\beta) = v^*(\neg\alpha)\vee v^*(\beta)$
- $v^*(\alpha\leftrightarrow\beta) = v^*(\alpha)\leftrightarrow v^*(\beta) = v^*(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \vee v^*(\alpha\wedge\beta)$

Def.2.3(Logické axiómy a pravidlá formálneho systému VL)

Logické axiómy:

(p)	$\neg A\vee A$	- propozicionálna axióma

Logické pravidlá:

(ex)	$A\Rightarrow(A\vee B)$	- pravidlo expanzie (znamená „z A odvoď $A\vee B$“)
(sh)	$(A\vee A) \Rightarrow A$	- pravidlo krátenia
(as)	$A\vee(B\vee C) \Rightarrow (A\vee B)\vee C$	- pravidlo asociatívnosti
(cu)	$A\vee B, \neg A\vee C \Rightarrow B\vee C$	- pravidlo rezu

3. Klasifikácia formúl. Tautológie a dokázateľnosť.

Def.3.1 (Klasifikácia formúl)

Formula A je **vždy pravdivá** (**tautológia**) ak platí, že $v^*(A) = t$ pre ľubovoľné pravdivostné ohodnotenie *v*. Zapisujeme $\models A$.
Formula A je **splniteľná** ak platí, že $v^*(A) = t$ pre aspoň jedno pravdivostné ohodnotenie *v*.
Formula A je **nesplniteľná** (**totálne nepravdivá**) že $v^*(A) = f$ pre ľubovoľné pravdivostné ohodnotenie *v*.

Def. 3.2 (Tautologický dôsledok ,Tautológia)

Formula B je **tautologický dôsledok** formúl A_1, … A_n práve vtedy, ak $v^*(B)=t$ pre každé pravdivostné ohodnotenie *v*, pre ktoré platí: $v^*(A_i)=t$, $i=1...n$.

Formula A je **tautológia** práve vtedy, ak je tautologickým dôsledkom prázdnej množiny formúl. Tzn. A je pravdivá pri akomkoľvek ohodnotení.

Veta 1 (Veta o tautológii)

Ak B je tautologický dôsledok formúl A_1, … A_n a $\vdash A_1, \ldots, \vdash A_n$, potom $\vdash B$.

Veta 2 (Dôsledok vety 1):

Každá tautológia je teorémou ($\vdash A$ práve vtedy ak $\models A$)

Veta 3

Ak $\vdash A_1, \ldots, \vdash A_n$ a $\vdash (A_1\rightarrow \ldots \rightarrow A_n\rightarrow B)$, potom $\vdash B$.

4. Varianty vety o tautológii

Pri dôkazoch je možné použiť aj nasledujúce teorémy:

(i) Ak $\vdash A\leftrightarrow B$ potom $\vdash A \Leftrightarrow \vdash B$
(ii) Ak $\vdash A\rightarrow B$ a $\vdash B\rightarrow C$ potom $\vdash A\rightarrow C$
(iii) Ak $\vdash A\leftrightarrow B$ a $\vdash B\leftrightarrow C$ potom $\vdash A\leftrightarrow C$
(iv) $\vdash A\wedge B$ práve vtedy ak $\vdash A$ a $\vdash B$
(v) $\vdash A\leftrightarrow B$ práve vtedy ak $\vdash A\rightarrow B$ a $\vdash B\rightarrow A$
(vi) $\vdash A\rightarrow B$ práve vtedy ak $\vdash \neg B \rightarrow \neg A$

Štefan Korečko, 2014.
Tento dokument vznikol v rámci riešenia projektu „Informačné technológie pre prenos znalostí“ (ITMS kód 26220220123) IT4KT

5. Vlastnosti Boolovej algebry

Vo výrokovej logike možno formuly previesť na ekvivalentné výrazy v Boolovej algebre a tie pomocou nižšie uvedených vlastností redukovať na konštantný výraz „1“.

Vybrané vlastnosti Boolovej algebry:

a) $x+\overline{x}=1,\ x.\overline{x}=0$ - inverzný prvok
b) $0+x=x$, $1.x=x$ – neutrálny prvok/*
c) $a+(b.c) = (a+b).(a+c)$, $a.(b+c)=(a.b) +(a.c)$ - distributívnosť
1. $x+1=1$ $\quad$ $x.0=0$
2. $x+(y+z)=(x+y)+z$ $\quad$ $x.(y.z)=(x.y).z$
3. $x+\overline{x}y=x+y$ $\quad$ $x.(\overline{x}+y)=xy$
4. $\overline{x.y}=\overline{x}+\overline{y}$ $\quad$ $\overline{x+y}=\overline{x}.\overline{y}$
5. $\overline{\overline{x}}=x$
6. $x+x=x$ $\quad$ $x.x=x$

Štefan Korečko, 2014.
Tento dokument vznikol v rámci riešenia projektu „Informačné technológie pre prenos znalostí“ (ITMS kód 26220220123) IT4KT