Kapitola 1

Gramatiky

1.1 Úvod

Základnými spôsobmi reprezentácie jazykov sú rozpoznávanie a generovanie. Gramatika je reprezentáciou jazyka generovaním. Gramatika je konečná množina pravidiel, ktorých postupnou aplikáciou je možné získať zo štartovacieho symbolu vetu (reťazec) patriacu do jazyka.

Formálna gramatika:

$G = (V_N, V_T, P, S)$

V_N - množina neterminálnych symbolov

V_T - množina terminálnych symbolov

P - množina pravidiel tvaru $\alpha \to \beta$

$\alpha \in (V_N \cup V_T)^* - V_T^*$

$\beta \in (V_N \cup V_T)^*$

S - štartovací symbol $S \in V_N$

Jazyk generovaný gramatikou:

$L(G) = \left\{ w \in V_T^* \quad | \quad S \overset{*}{\Rightarrow} w \right\}$

Klasifikácia gramatík (na základe tvaru pravidiel $\alpha \to \beta$):

Typ gramatiky	Názov gramatiky	Tvar pravidiel	
0	frázová		
1	kontextová	$\|\alpha\| \leq \|\beta\|$	
2	bezkontextová	$A \to \beta$	$A \in V_N$
3	regulárna	$A \to aB$ $A \to a$	$A, B \in V_N$ $a \in V_T$

1.2 Návrh gramatík

Príklad 1.1 *Navrhnite gramatiku pre jazyk* $L = \{0^n \quad | n \leq 1\}$

$S \to 0$
$S \to 0S$

Pozn. Pravidlá možno zapísať aj v zjednodušenom tvare $S \to 0 | S \to 0S$

- regulárna gramatika, regulárny jazyk

Príklad 1.2 *Navrhnite gramatiku pre jazyk* $L = \left\{0^{2n} \quad | n \leq 1\right\}$

$S \rightarrow 00$
$S \rightarrow 00S$

- bezkontextová gramatika, regulárny jazyk

$S \rightarrow 0A$
$A \rightarrow 0$
$S \rightarrow 0B$
$B \rightarrow 0S$

- regulárna gramatika, regulárny jazyk

Príklad 1.3 *Navrhnite gramatiku pre jazyk* $L = \{0^n 1^n \quad | n \leq 1\}$

$S \rightarrow 01$
$S \rightarrow 0S1$

- bezkontextová gramatika, bezkontextový jazyk

Príklad 1.4 *Navrhnite gramatiku pre jazyk* $L = \{x \in \{0,1\}^*\}$

$S \rightarrow 0|1|0S|1S$

- regulárna gramatika, regulárny jazyk

Príklad 1.5 *Navrhnite gramatiku pre jazyk* $L = \{x \in \{0,1\}^* | \quad x \textit{ neobsahuje } 11\}$

$S \rightarrow 0|1|0S|1A$
$A \rightarrow 0|0S$

- regulárna gramatika, regulárny jazyk

Príklad 1.6 *Navrhnite gramatiku pre jazyk* $L = \{x \in \{0,1\}^* | N_0(x) = N_1(x)\}$*, kde* $N_i(x)$ *je počet symbolov "i" v reťazci x.*

$S \rightarrow 0J|0SJ$
$J \rightarrow 1$
$0J \rightarrow J0$

- kontextová gramatika, bezkontextový jazyk

$S \rightarrow 0J|1N|0JS|1NS$
$J \rightarrow 1|0JJ$
$N \rightarrow 0|1NN$

- bezkontextová gramatika, bezkontextový jazyk

Príklad 1.7 *Navrhnite gramatiku pre jazyk* $L = \{x \in \{a,b,c\}^* | N_a(x) = N_b(x) = N_c(x)\}$, *kde* $N_i(x)$ *je počet symbolov "i" v reťazci x.*

$S \to ABC|ABCS$
$A \to a$
$B \to b$
$C \to c$
$AB \to BA$
$AC \to CA$
$BA \to AB$
$CA \to AC$
$BC \to CB$
$CB \to BC$

- kontextová gramatika, kontextový jazyk

Príklad 1.8 *Navrhnite gramatiku pre jazyk* $L = \{a^n b^n c^n \quad | n \leq 1\}$

$S \to abc|aSBc$
$cB \to Bc$
$bB \to bb$

- kontextová gramatika, kontextový jazyk

Príklad 1.9 *Navrhnite gramatiku pre jazyk* $L = \left\{xcx^R | x \in \{0,1\}^*\right\}$, *kde* x^R *je zrkadlový obraz reťazca x.*

$S \to 0S0|1S1|c$

- bezkontextová gramatika, bezkontextový jazyk

Príklad 1.10 *Navrhnite gramatiku pre jazyk* $L = \left\{xcx^R | x \in a^2b^2b^*a\right\}$, *kde* x^R *je zrkadlový obraz reťazca x.*

$S \to aabbBbbaa$
$B \to bBb|aca$

- bezkontextová gramatika, bezkontextový jazyk

Príklad 1.11 *Navrhnite gramatiku pre jazyk* $L = \{xcx | x \in \{0,1\}^*\}$

$S \to 0SN|1SJ|c$
$cJ \to c1$
$cN \to c0$
$0J \to J0$
$1J \to J1$
$0N \to N0$
$1N \to N1$

- kontextová gramatika, kontextový jazyk

Príklad 1.12 *Navrhnite gramatiku pre jazyk* $L = \{xx | x \in \{0,1\}^*\}$

$S \to 0SN | 1SJ | X$
$XJ \to X1$
$XN \to X0$
$0J \to J0$
$1J \to J1$
$0N \to N0$
$1N \to N1$
$0X \to 0$
$1X \to 1$

- frázová gramatika, kontextový jazyk

$S \to 0SN | 1SJ | N'N | J'J$
$N' \to 0$
$J' \to 1$
$N'J \to N'1$
$J'J \to J'1$
$N'N \to N'0$
$J'N \to J'0$
$0J \to J0$
$1J \to J1$
$0N \to N0$
$1N \to N1$

- kontextová gramatika, kontextový jazyk

Príklad 1.13 *Navrhnite gramatiku pre jazyk zátvorkových výrazov (zv), definovaných:*
() je zv
ak α, β *sú zv, potom aj* $\left\{ \begin{array}{c} \alpha\beta \\ (\alpha) \end{array} \right\}$ *sú zv*

$S \to () | (S) | SS$

- bezkontextová gramatika, bezkontextový jazyk

Príklad 1.14 *Navrhnite gramatiku pre jazyk boolovských výrazov (bv) nad abecedou V={a,b,c}, definovaných:*
0 je bv
1 je bv
x je bv, $x \in V$
ak α, β *sú bv, potom aj* $\left\{ \begin{array}{c} (\alpha \vee \beta) \\ (\alpha \wedge \beta) \\ \neg(\alpha) \end{array} \right\}$ *sú bv*

$S \to 0 | 1 | a | b | c | (S \vee S) | (S \wedge S) | \neg(S)$

- bezkontextová gramatika, bezkontextový jazyk

Príklad 1.15 *Navrhnite gramatiku pre jazyk* $L = \{x \in \{0,1\}^* | N_0(x) = 2 * N_1(x)\}$

$S \to 00J | 00SJ$
$J \to 1$
$0J \to J0$

- kontextová gramatika, bezkontextový jazyk

1.3 Rekurzívnosť kontextových jazykov

Príklad 1.16 *Rozhodnite (dokážte), či slovo $w = 000111$ patrí do jazyka generovaného gramatikou G s pravidlami $S \to 01|0S1$*

$T_0^6 = \{S\}$
$T_1^6 = T_0^6 \cup \{0S1, 01\}$
$T_2^6 = T_1^6 \cup \{00S11, 0011\}$
$T_3^6 = T_2^6 \cup \{000111\}$
$T_4^6 = T_3^6$
$w \in T_4^6 \implies w \in L(G)$

Príklad 1.17 *Rozhodnite (dokážte), či slová $w_1 = aaaabbbbb, w_2 = aaabbbccc$ patria do jazyka generovaného gramatikou G s pravidlami*
$S \to aBC|aSBC$
$CB \to BC$
$aB \to ab$
$bB \to bb$
$bC \to bc$
$cC \to cc$

$T_0^9 = \{S\}$
$T_1^9 = T_0^9 \cup \{aBC, aSBC\}$
$T_2^9 = T_1^9 \cup \{abC, aaBCBC, aaSBCBC\}$
$T_3^9 = T_2^9 \cup \{abc, aabCBC, aaBBCC, aaaBCBCBC, aaSBBCC\}$
$T_4^9 = T_3^9 \cup \{aabcBC, aabBCC, aaabCBCBC, aaaBBCCBC, aaaBCBBCC\}$
$T_5^9 = T_4^9 \cup \{aabbCC, aaabcBCBC, aaabBCCBC, aaabCBBCC, aaaBBCBCC\}$
$T_6^9 = T_5^9 \cup \{aabbcC, aaabcBBCC, aaabbCCBC, aaabBCBCC, aaaBBBCCC\}$
$T_7^9 = T_6^9 \cup \{aabbcc, aaabbcCBC, aaabbCBCC, aaabBBCCC\}$
$T_8^9 = T_7^9 \cup \{aaabbccBC, aaabbcBCC, aaabbBCCC\}$
$T_9^9 = T_8^9 \cup \{aaabbbCCC\}$
$T_{10}^9 = T_9^9 \cup \{aaabbbcCC\}$
$T_{11}^9 = T_{10}^9 \cup \{aaabbbccC\}$
$T_{12}^9 = T_{11}^9 \cup \{aaabbbccc\}$
$T_{13}^9 = T_{12}^9$
$w_1 \notin T_{13}^9 \implies w_1 \notin L(G)$
$w_2 \in T_{13}^9 \implies w_2 \in L(G)$

Kapitola 2

Konečné automaty s výstupom

2.1 Úvod

Konečný automat typu Mealy:
$M = (Q, S, R, f, g, q_0)$

Q	- konečná množina stavov
S	- vstupná abeceda
R	- výstupná abeceda
f	- prechodová funkcia $f : Q \times S \rightarrow Q$
g	- výstupná funkcia $g : Q \times S \rightarrow R$
q_0	- počiatočný stav $q_0 \in Q$ (nepovinný)

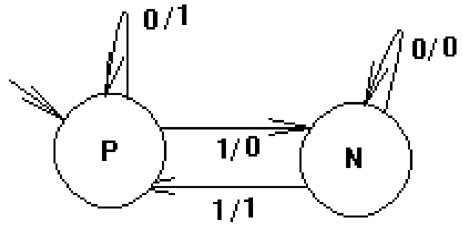
Činnosť automatu:
$T_M : S^* \rightarrow R^*$

Reprezentácie:

- tabuľka funkcií f a g
- prechodová tabuľka
- stavový diagram

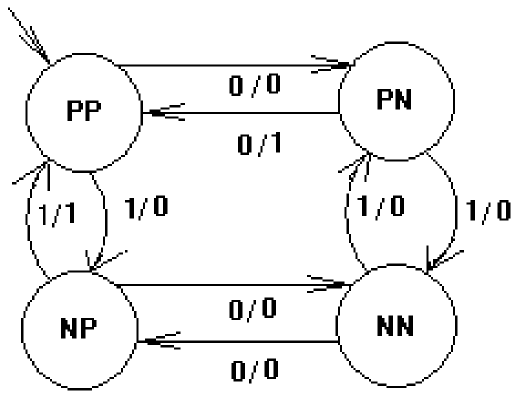
2.2 Návrh konečného automatu

Príklad 2.1 *Navrhnite konečný automat $(S, R = \{0, 1\})$ realizujúci zobrazenie:*
$r(t) = \begin{cases} 1 & \text{ak počet 1 v s(1),..., s(t) je deliteľný 2} \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$



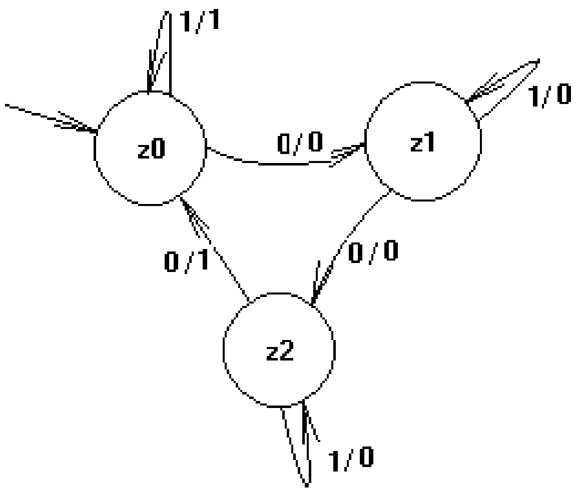
Príklad 2.2 *Navrhnite konečný automat* $(S, R = \{0, 1\})$ *realizujúci zobrazenie:*

$$r(t) = \begin{cases} 1 & \textit{ak počet 1 aj počet 0 v s(1),..., s(t) je deliteľný 2} \\ 0 & \textit{inak} \end{cases}$$



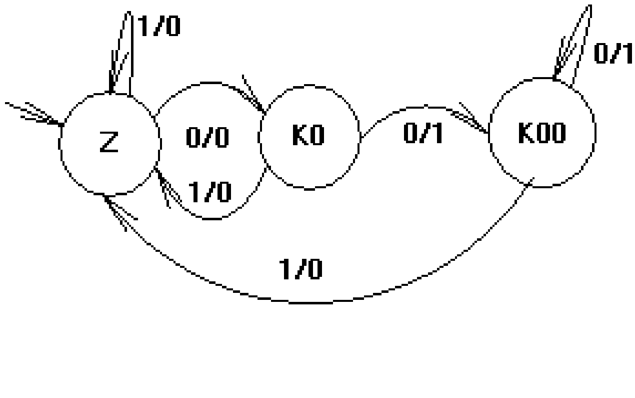
Príklad 2.3 *Navrhnite konečný automat* $(S, R = \{0, 1\})$ *realizujúci zobrazenie:*

$$r(t) = \begin{cases} 1 & \textit{ak počet 0 v s(1),..., s(t) je deliteľný 3} \\ 0 & \textit{inak} \end{cases}$$



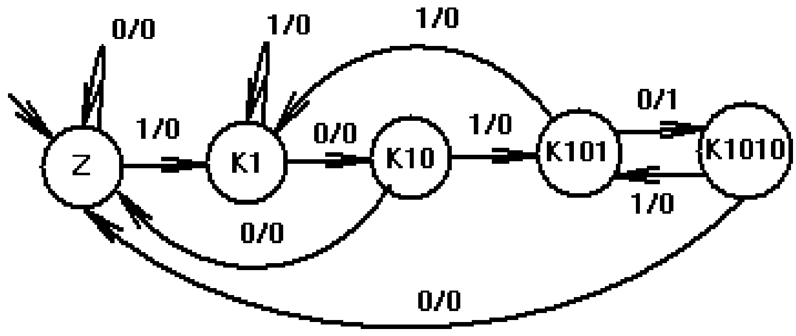
Príklad 2.4 *Navrhnite konečný automat* $(S, R = \{0, 1\})$ *realizujúci zobrazenie:*

$$r(t) = \begin{cases} 1 & \textit{ak vstup končí 00, teda s(t-1)=0,s(t)=0} \\ 0 & \textit{inak} \end{cases}$$



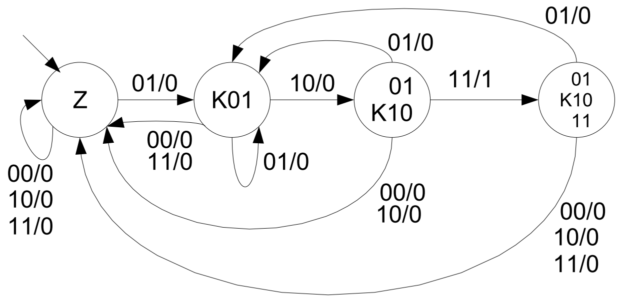
Príklad 2.5 *Navrhnite konečný automat ($S, R = \{0, 1\}$) realizujúci zobrazenie:*

$$r(t) = \begin{cases} 1 & \textit{ak vstup končí 1010, teda s(t)=0,s(t-1)=1,s(t-2)=0,s(t-3)=1} \\ 0 & \textit{inak} \end{cases}$$

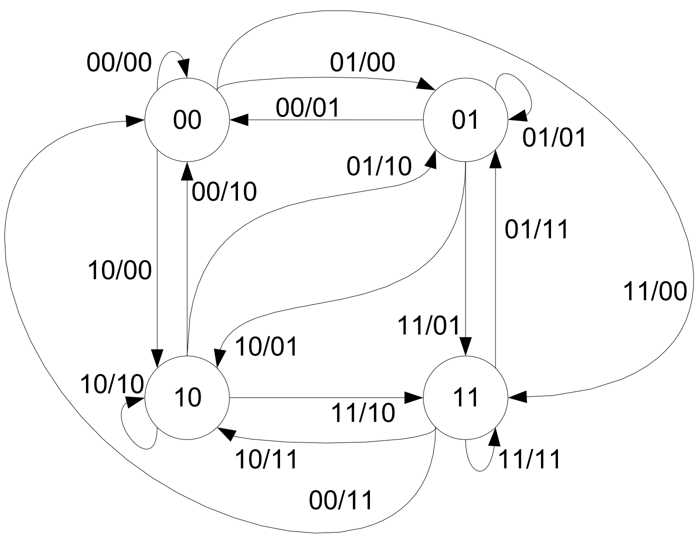


Príklad 2.6 *Navrhnite konečný automat ($S = \{0, 1\}^2, R = \{0, 1\}$) realizujúci zobrazenie:*

$$r(t) = \begin{cases} 1 & \textit{ak vstup končí 01 10 11, teda s(t)=11,s(t-1)=10,s(t-2)=01} \\ 0 & \textit{inak} \end{cases}$$

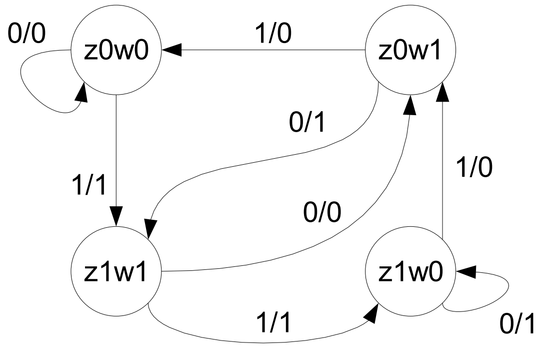


Príklad 2.7 *Navrhnite konečný automat ($S = \{0, 1\}^2, R = \{0, 1\}^2$) realizujúci zobrazenie:*
$r(t) = s(t - 1)$



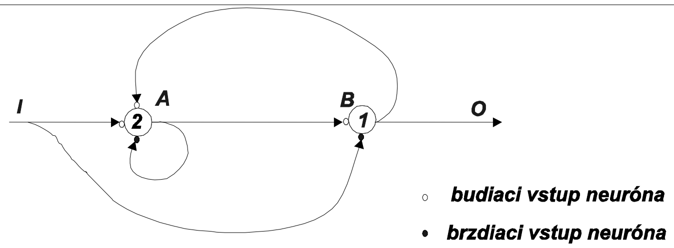
Príklad 2.8 *Navrhnite konečný automat* ($S = \{0,1\}, R = \{0,1\}$) *realizujúci výpočet:*

$$z(t) = x(t) \oplus z(t-1) \oplus w(t-1)$$
$$w(t) = x(t) \oplus w(t-1)$$

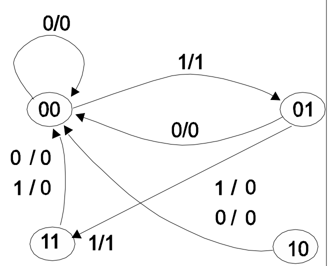


z(t-1)	w(t-1)	x(t)	z(t)	w(t)
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

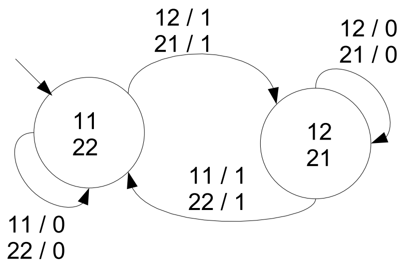
Príklad 2.9 *Navrhnite konečný automat simulujúci prácu neurónovej siete zobrazenej na nasledujúcom obrázku (a), kde I je vstup a O je výstup, signály možu nadobúdať hodnoty 0 a 1. Neurón je zobrazený ako kruh s prahovým číslom uprostred a môže byť v dvoch stavoch: vybudený (1) alebo nevybudený (0). Do stavu vybudený sa dostane, ak súčet budiacich signálov zmenšený o súšet brzdiacich signálov je najmenej rovný prahovému číslu.*



I(t) \ <AB> (t-1)	00	01	10	11
0	***00***	***00***	***00***	***00***
1	***01***	***11***	***00***	***00***



Príklad 2.10 *Navrhnite konečný automat počítajúci súčet modulo 2 dvojíc po sebe idúcich hodov dvoma mincami so stranami označenými 1 a 2 (teda* $S = 11, 12, 21, 22$*).*



2.3 Podobnosť automatov typu Mealy a Moore

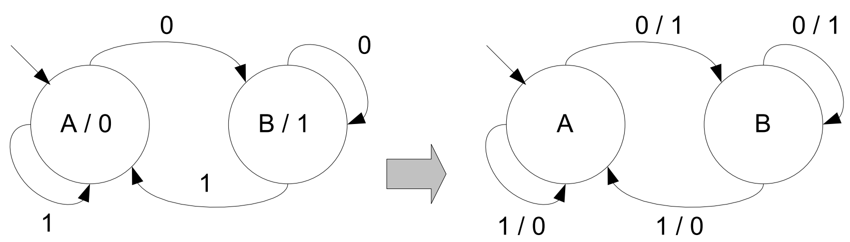
Konečný automat typu Moore:
$M = (Q, S, R, f, h, q_0)$

- Q - konečná množina stavov
- S - vstupná abeceda
- R - výstupná abeceda
- f - prechodová funkcia $f : Q \times S \to Q$
- h - výstupná funkcia $h : Q \to R$
- q_0 - počiatočný stav $q_0 \in Q$ (nepovinný)

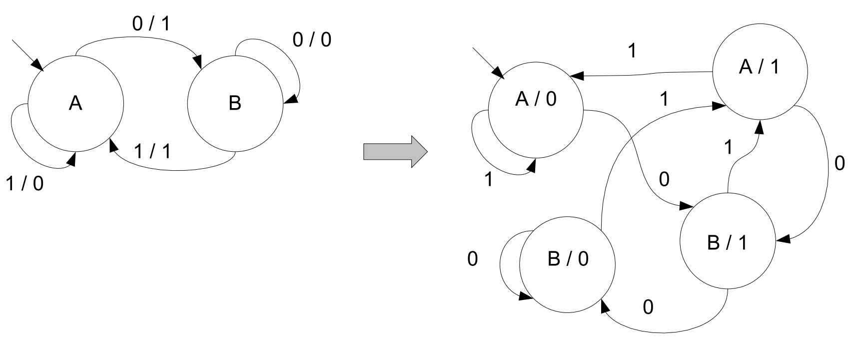
Ku každému automatu $M_s = (Q_s, S, R, f_s, h, q_{0s})$ typu Moore existuje podobný automat $M_t = (Q_t, S, R, f_t, g, q_{0t})$ typu Mealy a naopak.

Moore $\Longrightarrow$ Mealy	Mealy $\Longrightarrow$ Moore
$Q_t = Q_s$	$Q_s = Q_t \times R$
$f_t = f_s$	$f_s((q, x), a) = (p, r) \Leftrightarrow f_t(q, a) = p \wedge q_t(q, a) = r$
$q_{0t} = q_{0s}$	$q_{0s} = (q_{0t}, r)$ pre niektoré $r \in R$
$g = h \circ f$	$h((q, r)) = r$

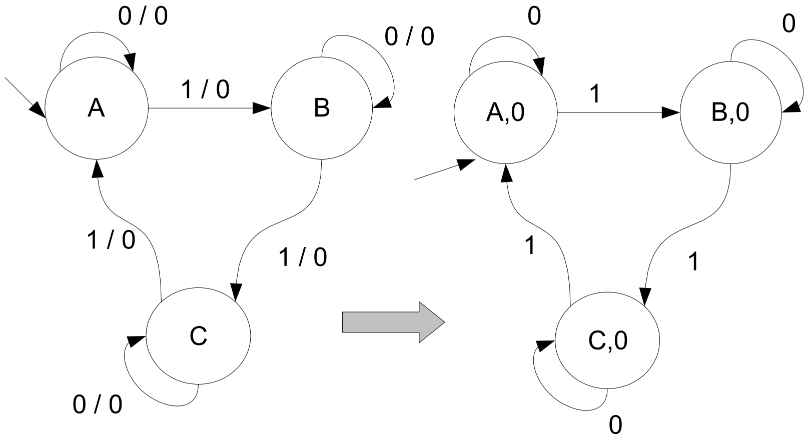
Príklad 2.11 *K danému Moore automatu nájdite podobný Mealy automat*



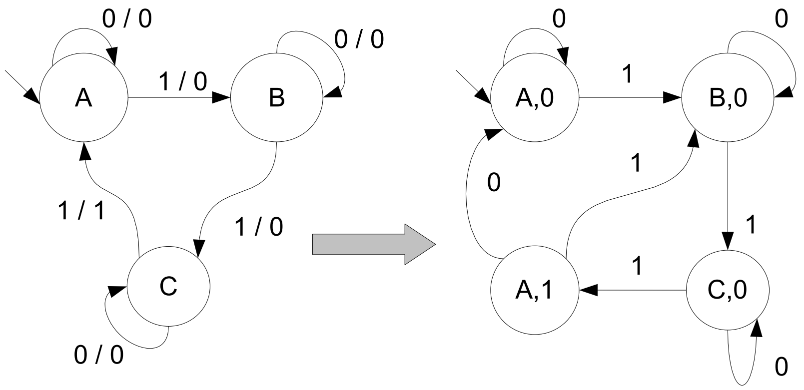
Príklad 2.12 *K danému Mealy automatu nájdite podobný Moore automat*



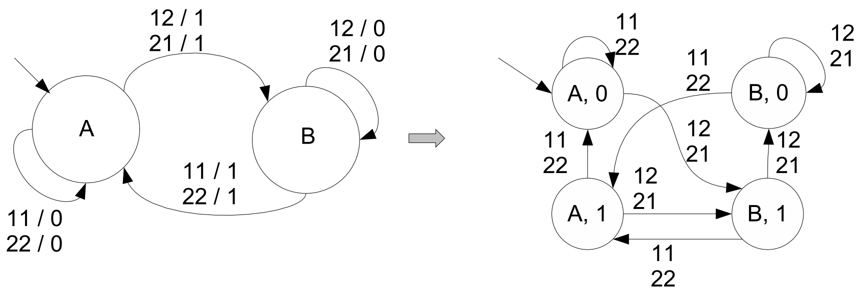
Príklad 2.13 *K danému Mealy automatu nájdite podobný Moore automat*



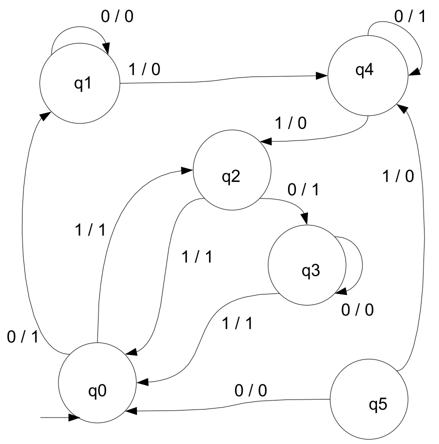
Príklad 2.14 *K danému Mealy automatu nájdite podobný Moore automat*

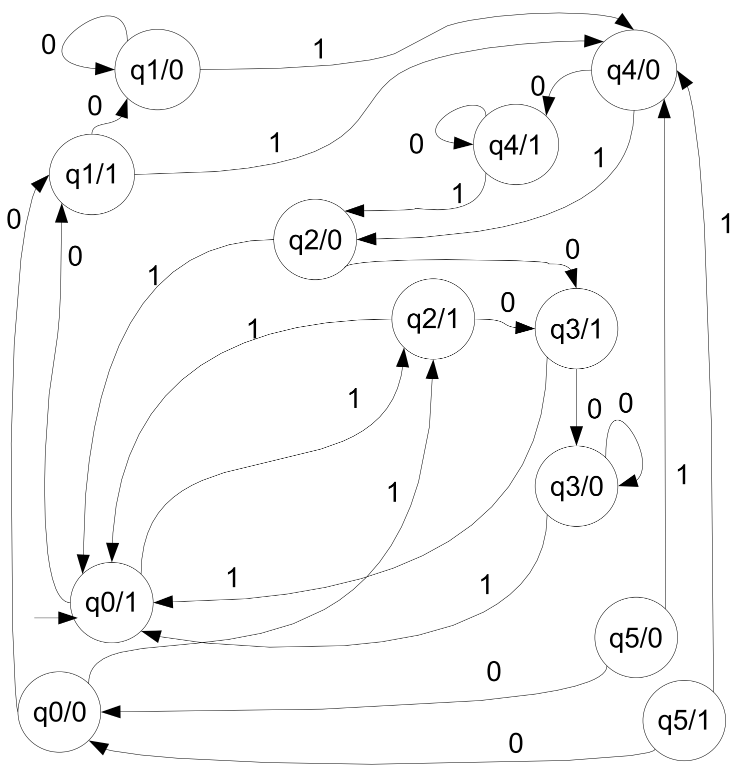


Príklad 2.15 *K danému Mealy automatu nájdite podobný Moore automat*



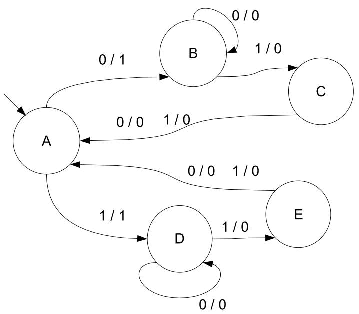
Príklad 2.16 *K danému Mealy automatu nájdite podobný Moore automat*





2.4 Ekvivalencia stavov a redukcia automatu

Príklad 2.17 *K danému Mealy automatu nájdite redukovaný Mealy automat*



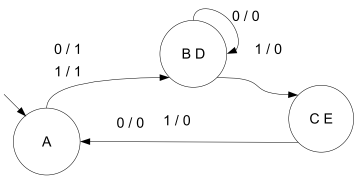
Prechodová tabuľka

Q \ S	0	1
A	B/1	D/1
B	B/0	C/0
C	A/0	A/0
D	D/0	E/0
E	A/0	A/0

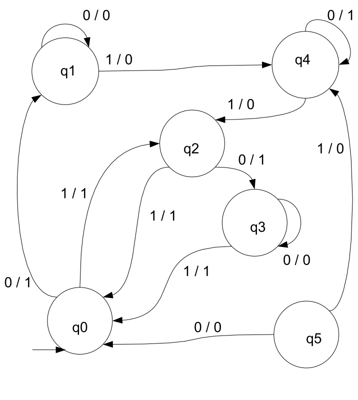
Rozklad na triedy ekvivalentných stavov

$P^1 : \{A\}, \{B, C, D, E\}$
$P^2 : \{A\}, \{B, D\}, \{C, E\}$
$P^3 : \{A\}, \{B, D\}, \{C, E\}$
$P^3 = P^2$

Redukovaný automat:



Príklad 2.18 *Nájdite ekvivalentné stavy v danom Mealy automate*

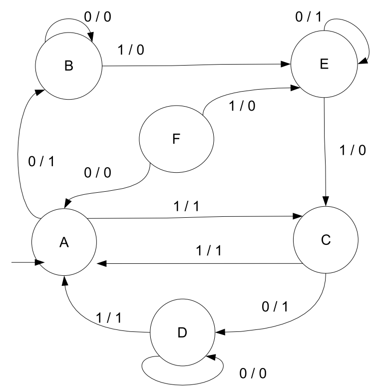


Q \ S	0	1
q0	q1/1	q2/1
q1	q1/0	q4/0
q2	q3/1	q0/1
q3	q3/0	q0/0
q4	q4/1	q2/0
q5	q0/0	q4/0

$P^1 : \{q0, q2\}, \{q1, q5\}, \{q3\}, \{q4\}$
$P^2 : \{q0\}, \{q2\}, \{q1\}, \{q5\}, \{q3\}, \{q4\}$
$P^3 : \{q0\}, \{q2\}, \{q1\}, \{q5\}, \{q3\}, \{q4\}$
$P^3 = P^2$

Neobsahuje ekvivalentné stavy.

Príklad 2.19 *K danému Mealy automatu nájdite redukovaný Mealy automat*



Q \ S	0	1
A	B/1	C/1
B	B/0	E/0
C	D/1	A/1
D	D/0	A/0
E	E/1	C/0
F	A/0	E/0

$P^1 : \{A, C\}, \{B, F\}, \{D\}, \{E\}$
$P^2 : \{A\}, \{C\}, \{B\}, \{F\}, \{D\}, \{E\}$
$P^3 : \{A\}, \{C\}, \{B\}, \{F\}, \{D\}, \{E\}$
$P^3 = P^2$

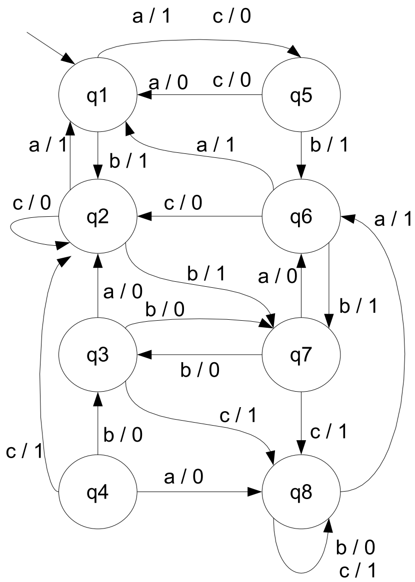
Automat neobsahuje ekvivalentné stavy, je redukovaný.

Príklad 2.20 *Pre Mealy automat zadaný prechodovou tabuľkou nájdite ekvivalentné stavy:*

Q \ S	a	b
A	E/0	F/0
B	G/0	G/0
C	I/0	F/1
D	A/1	C/0
E	A/0	I/1
F	B/0	J/1
G	H/0	C/1
H	I/1	A/1
I	J/1	I/0
J	I/1	I/0

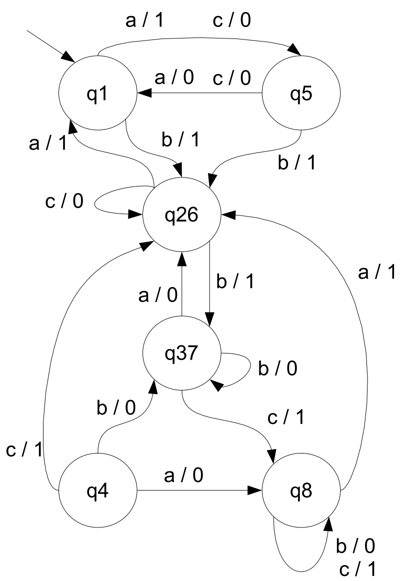
$P^1 : \{A, B\}, \{C, E, F, G\}, \{D, I, J\}, \{H\}$
$P^2 : \{A, B\}, \{C\}, \{E, F\}, \{G\}, \{D\}, \{I, J\}, \{H\}$
$P^3 : \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{E, F\}, \{G\}, \{D\}, \{I, J\}, \{H\}$
$P^4 : \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{E\}, \{F\}, \{G\}, \{D\}, \{I, J\}, \{H\}$
$P^5 = P^4$

Príklad 2.21 *K danému Mealy automatu nájdite redukovaný Mealy automat*



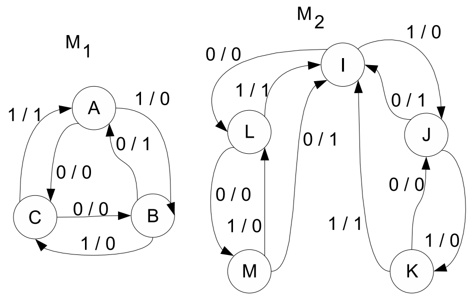
Q \ S	a	b	c
q1	q5/1	q2/1	q5/0
q2	q1/1	q7/1	q2/0
q3	q2/0	q7/0	q8/1
q4	q8/0	q3/0	q2/1
q5	q1/0	q6/1	q1/0
q6	q1/1	q7/1	q2/0
q7	q6/0	q3/0	q8/1
q8	q6/1	q8/0	q8/1

$P^1 : \{q1, q2, q6\}, \{q3, q4, q7\}, \{q5\}, \{q8\}$
$P^2 : \{q1\}, \{q2, q6\}, \{q3, q7\}, \{q4\}, \{q5\}, \{q8\}$
$P^3 : \{q1\}, \{q2, q6\}, \{q3, q7\}, \{q4\}, \{q5\}, \{q8\}$
$P^3 = P^2$



2.5 Ekvivalencia automatov

Príklad 2.22 *Zistite, či sú dané Mealy automaty M_1 a M_2 ekvivalentné*



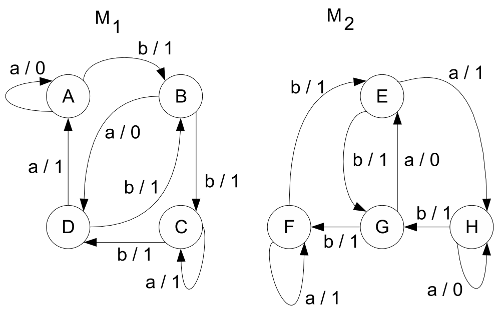
$M = M_1 \cup M_2$

Q \ S	0	1
A	C/0	B/0
B	A/1	C/0
C	B/0	A/1
I	L/0	J/0
J	I/1	K/0
K	J/0	I/1
L	M/0	I/1
M	I/1	L/0

$P^1 : \{A, I\}, \{B, J, M\}, \{C, K, L\}$
$P^2 : \{A, I\}, \{B, J, M\}, \{C, K, L\}$
$P^2 = P^1$

Ku každému stavu automatu M_1 existuje ekvivalentný stav v automate M_2 a naopak, teda automaty sú ekvivalentné.

Príklad 2.23 *Zistite, či sú dané Mealy automaty M_1 a M_2 ekvivalentné*



$M = M_1 \cup M_2$

Q \ S	a	b
A	A/0	B/1
B	B/0	C/1
C	C/1	D/1
D	A/1	B/1
E	H/1	G/1
F	F/1	E/1
G	E/0	F/1
H	H/0	G/1

$P^1 : \{A, B, G, H\}, \{C, D, E, F\}$
$P^2 : \{A, H\}, \{B, G\}, \{C, F\}, \{D, E\}$
$P^3 = P^2$

$M_1 \sim M_2$

Kapitola 3

Konečno-stavové akceptory

3.1 Úvod

Deterministický konečno-stavový automat (dksa):

$M = (Q, S, f, q_0, F)$

Q	- konečná množina stavov
S	- vstupná abeceda
f	- prechodová funkcia $f : Q \times S \to Q$
q_0	- počiatočný stav $q_0 \in Q$
F	- množina finálových stavov $F \subseteq Q$

Jazyk akceptovaný automatom:

$L(M) = \{w \in S^* \quad | \quad q_0 \xrightarrow{w} q_F, \quad q_F \in F\}$

Nedeterministický konečno-stavový automat (ndksa):

$M = (Q, S, P, I, F)$

Q	- konečná množina stavov
S	- vstupná abeceda
P	- prechodová funkcia $P : Q \times S \to 2^Q$
I	- množina počiatočných stavov $I \subseteq Q$
F	- množina finálnych stavov $F \subseteq Q$

Zdroje nedeterminizmu

- viac počiatočných stavov ($I = \{q, p\}$)
- viac prechodov pre daný stav a vstupný symbolov ($P(q, a) = \{q1, q2\}$)

Determinizácia:

- pomocou makrostavov (makrostav $\{X, Y, Z\}$ budeme zapisovať priamo XYZ)
- najvhodnejšie je priamo vytvárať prechodovú tabuľku deterministického ksa - je možné priamo redukovať

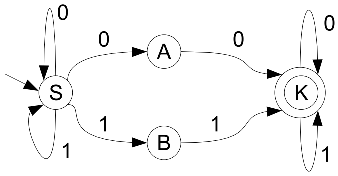
Redukcia:

- postup ako pri redukcii konečného automatu s výstupom, ale s tým rozdielom, že počiatočné rozdelenie P^0 je na 2 množiny - finálne stavy a nefinálne stavy.

3.2 Návrh ksa a determinizácia

Príklad 3.1 *Navrhnite nedeterministický ksa pre jazyk* $L(M) = \{x \in \{0,1\}^*, x \text{ obsahuje 00 alebo 11}\}$ *, potom ho determinizujte a redukujte.*

Nedeterministický - stavový diagram



Nedeterministický - prechodová tabuľka

Q \ S	0	1
S	A, S	B, S
A	K	-
B	-	K
K	K	K

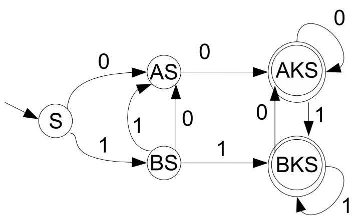
Determinizácia:

Q \ S	0	1
S	AS	BS
AS	AKS	BS
BS	AS	BKS
AKS	AKS	BKS
BKS	AKS	BKS

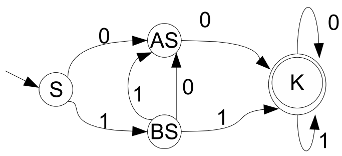
Redukcia:

P^0: { S, AS, BS }, { AKS, BKS }
P^1: { S }, {AS }, { BS }, { AKS, BKS }
P^2: { S }, {AS }, { BS }, { AKS, BKS }
$P^2 = P^1$, na obr. je K je zlúčením stavov AKS, BKS

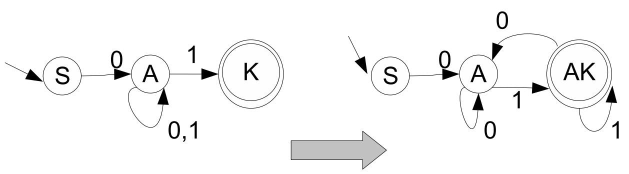
Deterministický:



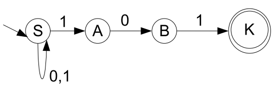
Redukovaný:



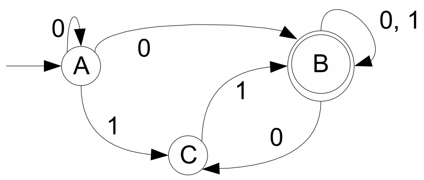
Príklad 3.2 *Navrhnite nedeterministický ksa pre jazyk* $L(M) = \{x \in \{0,1\}^*, x \text{ začína 0 a končí 1}\}$ *a determinizujte ho.*



Príklad 3.3 *Navrhnite nedeterministický ksa pre jazyk* $L(M) = \{x \in \{0,1\}^*, x \text{ končí 101}\}$ *a determinizujte ho.*



Príklad 3.4 *Determinizujte daný ksa.*



Nedeterministický:

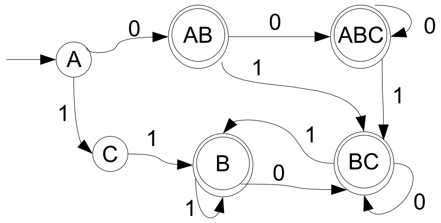
Q \ S	0	1
A	A,B	C
B	B,C	B
C	-	B

Deterministický:

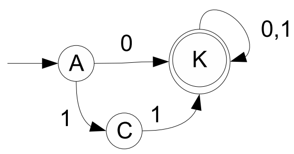
Q \ S	0	1
A	AB	C
AB	ABC	BC
C	-	B
ABC	ABC	BC
BC	BC	B
B	BC	B

Redukcia:
P^0: { A, C }, { B, AB, ABC, BC }
P^1: { A }, {C }, { B, AB, ABC, BC }
$P^2 = P^1$, na obr. je K je zlúčením stavov B, AB, ABC, BC

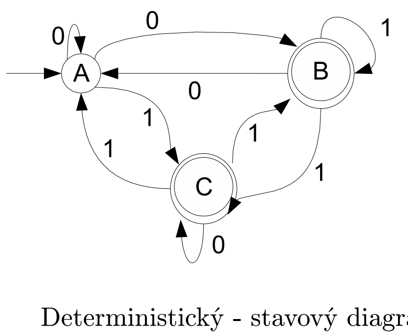
Deterministický - stavový diagram:



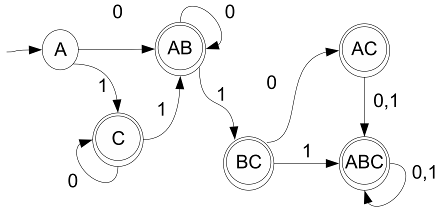
Redukovaný - stavový diagram:



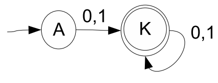
Príklad 3.5 *Determinizujte daný ksa.*



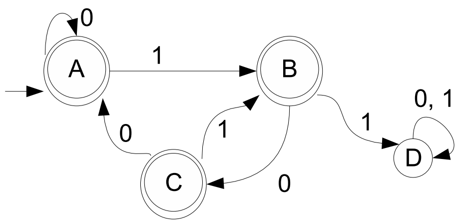
Deterministický - stavový diagram:



Redukovaný - stavový diagram:

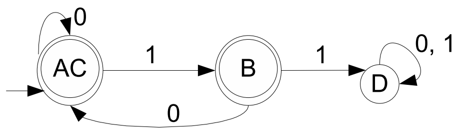


Príklad 3.6 *Redukujte daný ksa.*



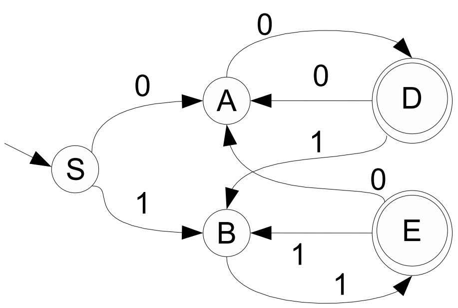
Redukcia:

Redukovaný - stavový diagram:



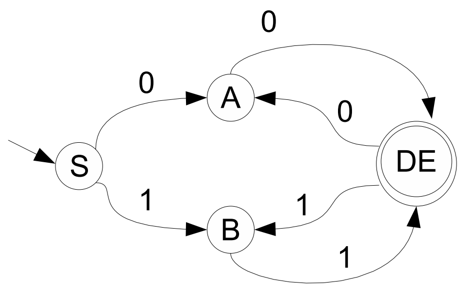
P^0: { A, B, C }, { D }
P^1: { A, C }, {B }, { D }
$P^2 = P^1$

Príklad 3.7 *Redukujte daný ksa.*



Redukcia:

Redukovaný - stavový diagram:



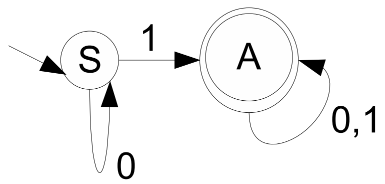
P^0: { S, A, B }, { D, E }
P^1: { S }, { A }, { B }, { D, E }
$P^2 = P^1$

3.3 Vzťah ksa a regulárnych gramatík

Pre každý ksa $M = (Q, S, \delta, I, F)$ vieme zostrojiť regulárnu gramatiku $G = (V_N, V_T, P, \Sigma)$ takú, že L(G)=L(M) a naopak.

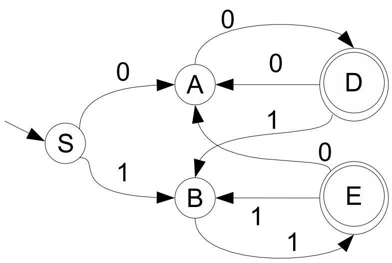
$M \to G$	$G \to M$
$V_N = Q$ $V_T = S$	$Q = V_N \cup \{q_F\}$ $S = V_T$ $q_F \in F$
$B \in \delta(A, a) \Rightarrow A \to aB \in P$ $B \in \delta(A, a), B \in F \Rightarrow A \to aB \vert a \in P$ $B \in I \Rightarrow \Sigma \to B \in P$ $B \in I \wedge B \in F \Rightarrow \Sigma \to B \vert \lambda \in P$	$A \to aB \in P \Rightarrow B \in \delta(A, a)$ $A \to a \in P \Rightarrow q_F \in \delta(A, a)$ $\Sigma \to B \in P \Rightarrow B \in I$ $\Sigma \to B \vert \lambda \in P \Rightarrow B \in I \wedge B \in F$

Príklad 3.8 *Nájdite gramatiku G jazykovo ekvivalentnú s automatom:*



S → 0S | 1A | 1
A → 0A | 1A | 0 | 1

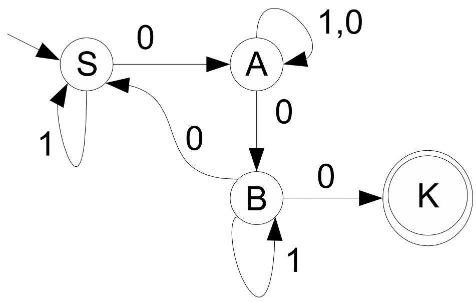
Príklad 3.9 *Nájdite gramatiku G jazykovo ekvivalentnú s automatom:*



S → 0A | 1B
A → 0D | 0
B → 1E | 1
D → 0A | 1B
E → 0A | 1B

Príklad 3.10 *Nájdite ksa jazykovo ekvivalentný s gramatikou G:*

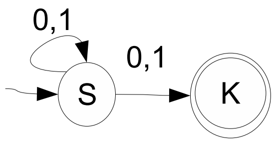
$S \rightarrow 0A \mid 1S$
$A \rightarrow 0B \mid 0A \mid 1A$
$B \rightarrow 0S \mid 1B \mid 0$



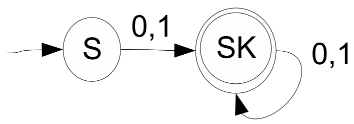
Príklad 3.11 *Nájdite deterministický ksa jazykovo ekvivalentný s gramatikou G:*

$S \rightarrow 0S \mid 1S \mid 0 \mid 1$

Nedeterministický:



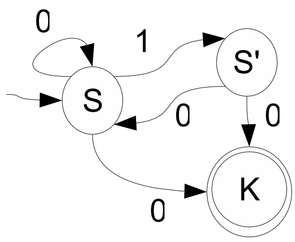
Deterministický:



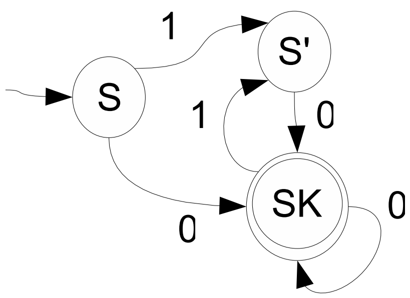
Príklad 3.12 *Nájdite deterministický ksa jazykovo ekvivalentný s gramatikou G:*

$S \rightarrow 0S \mid 1S' \mid 0$
$S' \rightarrow 0S \mid 0$

Nedeterministický:



Deterministický:

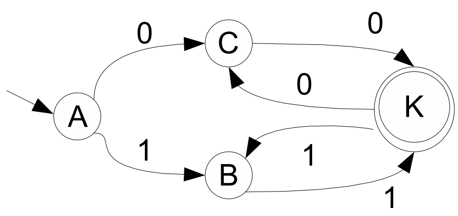


3.4 Vzťah ksa a regulárnych výrazov

Pre každý ksa M vieme nájsť regulárny výraz α taký, že $[\alpha]$=L(M) a naopak.

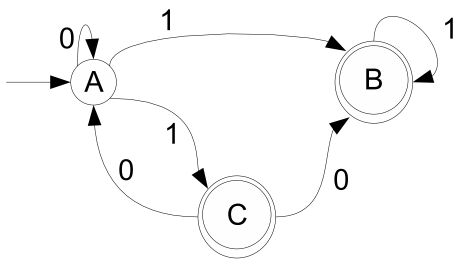
3.4.1 Analýza ksa

Príklad 3.13 *Nájdite regulárny výraz pre jazyk rozpoznávaný automatom:*



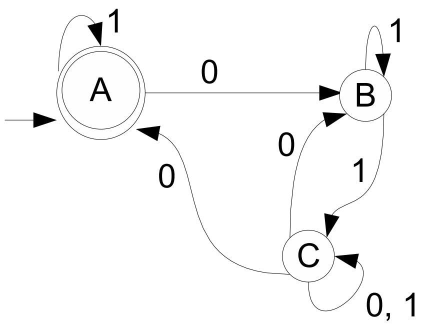
$$
\begin{array}{l}
e_A = 1e_B + 0e_C \\
e_B = 1e_K \\
e_C = 0e_K \\
e_K = 1e_B + 0e_C + \lambda \\
\hline
e_K = 11e_K + 00e_K + \lambda \\
e_K = (11+00)e_K + \lambda = (11+00)^* \\
e_A = 11e_K + 00e_K = (11+00)e_K \\
e_A = (11+00)(11+00)^*
\end{array}
$$

Príklad 3.14 *Nájdite regulárny výraz pre jazyk rozpoznávaný automatom:*



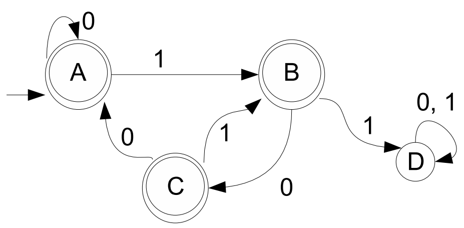
$$
\begin{array}{l}
e_A = 0e_A + 1e_B + 1e_C \\
e_B = 1e_B + \lambda \\
e_C = 0e_B + 0e_A + \lambda \\
\hline
e_B = 1^* \\
e_C = 01^* + 0e_A + \lambda \\
e_A = 0e_A + 11^* + 1(01^* + 0e_A + \lambda) \\
e_A = 0e_A + 10e_A + 11^* + 101^* + 1 \\
e_A = (0+10)e_A + 11^* + 101^* + 1 \\
e_A = (0+10)^*(11^* + 101^* + 1)
\end{array}
$$

Príklad 3.15 *Nájdite regulárny výraz pre jazyk rozpoznávaný automatom:*



$$
\begin{array}{l}
e_A = 0e_B + 1e_A + \lambda \\
e_B = 1e_B + 1e_C \\
e_C = (0+1)e_C + 0e_B + 0e_A \\
\hline
e_B = 1^*1e_C \\
e_C = (0+1)e_C + 01^*1e_C + 0e_A \\
e_C = (0+1+01^*1)e_C + 0e_A \\
e_C = (0+1+01^*1)^*0e_A \\
e_A = 01^*1e_C + 1e_A + \lambda \\
e_A = 01^*1(0+1+01^*1)^*0e_A + 1e_A + \lambda \\
e_A = (01^*1(0+1+01^*1)^*0+1)^*
\end{array}
$$

Príklad 3.16 *Nájdite regulárny výraz pre jazyk rozpoznávaný automatom:*

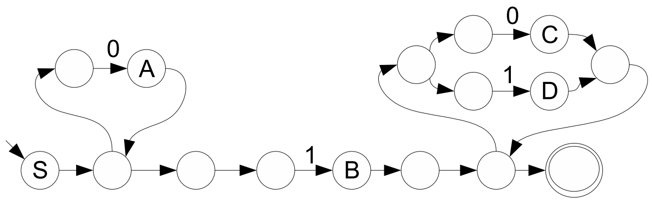


$$
\begin{array}{l}
e_A = 0e_A + 1e_B + \lambda \\
e_B = 0e_C + 1e_D + \lambda \\
e_C = 0e_A + 1e_B + \lambda \\
e_D = (0+1)e_D \\
\hline
e_D = (0+1)^*\phi = \phi \\
e_B = 0e_C + 1\phi + \lambda = 0e_C + \lambda \\
e_C = e_A \\
e_B = 0e_A + \lambda \\
e_A = 0e_A + 1(0e_A + \lambda) + \lambda \\
e_A = (0+10)e_A + 1 + \lambda \\
e_A = (0+10)^*(1+\lambda)
\end{array}
$$

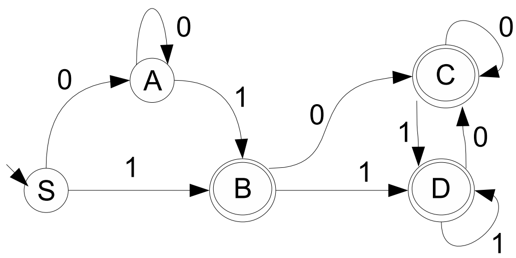
3.4.2 Syntéza ksa

Príklad 3.17 *Nájdite ksa M pre regulárny výraz $\alpha = 0^*1(0+1)$, aby $L(M) = [\alpha]$:*

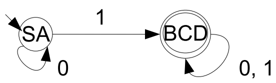
$\lambda - KSA$ (neoznačené prechody sú λ-prechody):



KSA:

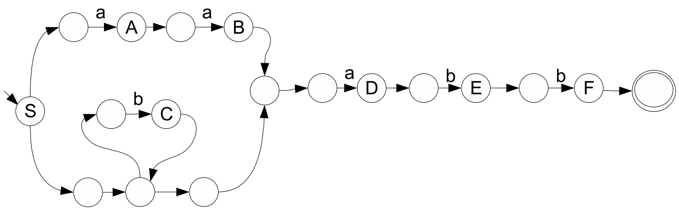


Redukovaný KSA:

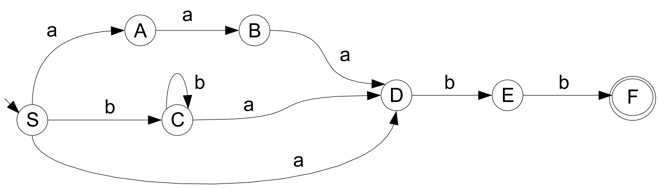


Príklad 3.18 *Nájdite ksa M pre regulárny výraz* $\alpha = (aa + b^*)abb$*, aby* $L(M) = [\alpha]$*:*

$\lambda - KSA$ (neoznačené prechody sú λ-prechody):

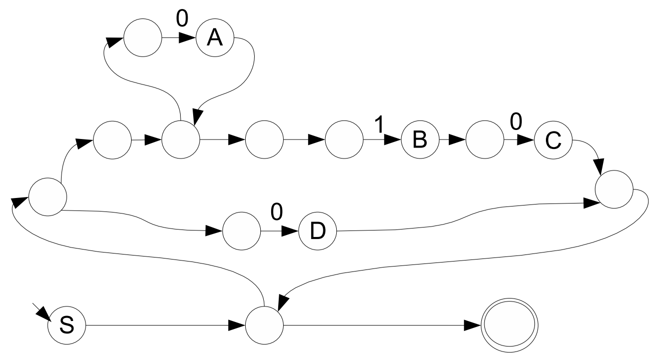


KSA:

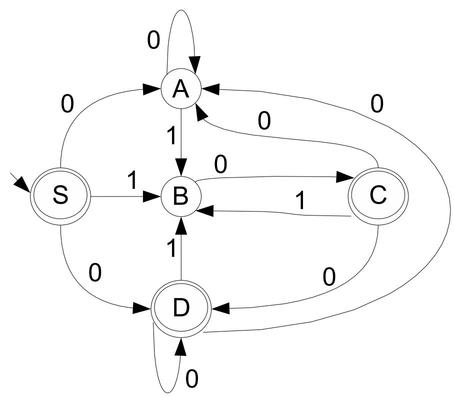


Príklad 3.19 *Nájdite ksa M pre regulárny výraz $\alpha = (0^*10 + 0)^*$, aby $L(M) = [\alpha]$:*

$\lambda - KSA$ (neoznačené prechody sú λ-prechody):



KSA:



Príklad 3.20 *Nájdite ksa M pre regulárny výraz $\alpha = (1 + 01(01 + 0)^*1)^*$, aby $L(M) = [\alpha]$:*

Príklad 3.21 *Nájdite ksa M pre regulárny výraz $\alpha = (11(01 + 10 + 00)^*11)^*$, aby $L(M) = [\alpha]$:*

Príklad 3.22 *Určte, či sú dané dva regulárne výrazy α a β ekvivalentné:*
$\alpha = ((0 + 1)^*10)^*$
$\beta = ((10)^* + 10)^*$

Príklad 3.23 *Určte, či sú dané dva regulárne výrazy α a β ekvivalentné:*
$\alpha = (0^*10 + 0)^*$
$\beta = ((0^*10)^* + 0^*)^*$

Poznámka: Dá sa tiež zistiť prevodom na ksa a určením ekvivalencie ksa, ale je možné aj využiť vlastnosti regulárnych výrazov. Ná základe vzťahu $(u+v)^* = (u^*+v^*)^*$, sú uvedené výrazy ekvivalentné, pretože pre $u = 0^*10$ a $v = 0$ je možné vyjadriť $\alpha = (u + v)^*$ a $\beta = (u^* + v^*)^*$.

Kapitola 4

Zásobníkové automaty

4.1 Návrh zásobníkových automatov

Príklad 4.1 *Navrhnite za pre jazyk* $L(M) = \{0^n 1^n, n > 0\}$.

$(q_0, 0, Z, q_0, 0Z)$
$(q_0, 0, 0, q_0, 00)$
$(q_0, 1, 0, q_1, \lambda)$
$(q_1, 1, 0, q_1, \lambda)$
$(q_1, \lambda, Z, q_F, Z)$

Príklad 4.2 *Navrhnite za pre jazyk* $L(M) = \{a^n b^{2n}, n > 0\}$.

(q_0, a, Z, q_0, aaZ)
(q_0, a, a, q_0, aaa)
$(q_0, b, a, q_1, \lambda)$
$(q_1, b, a, q_1, \lambda)$
$(q_1, \lambda, Z, q_F, Z)$

Príklad 4.3 *Navrhnite za pre jazyk* $L(M) = \{xcx^R, x \in \{0,1\}^*\}$.

$(q_0, 0, Z, q_0, 0Z)$
$(q_0, 1, Z, q_0, 1Z)$
$(q_0, 0, 0, q_0, 00)$
$(q_0, 0, 1, q_0, 01)$
$(q_0, 1, 0, q_0, 10)$
$(q_0, 1, 1, q_0, 11)$
$(q_0, c, 0, q_1, 0)$
$(q_0, c, 1, q_1, 1)$
$(q_1, 0, 0, q_1, \lambda)$
$(q_1, 1, 1, q_1, \lambda)$
$(q_1, \lambda, Z, q_F, Z)$

Príklad 4.4 *Navrhnite za pre jazyk* $L(M) = \{xx^R, x \in \{0,1\}^*\}$.

$(q_0, 0, Z, q_0, 0Z)$
$(q_0, 1, Z, q_0, 1Z)$
$(q_0, 0, 0, q_0, 00)$
$(q_0, 0, 1, q_0, 01)$
$(q_0, 1, 0, q_0, 10)$
$(q_0, 1, 1, q_0, 11)$
$(q_0, 0, 0, q_1, \lambda)$
$(q_0, 1, 1, q_1, \lambda)$
$(q_1, 0, 0, q_1, \lambda)$
$(q_1, 1, 1, q_1, \lambda)$
$(q_1, \lambda, Z, q_F, Z)$
Pozn. ZA je nedeterministický.

Príklad 4.5 *Navrhnite za pre jazyk* $L(M) = \{x \in \{a,b\}^*, N_a(x) = N_b(x)\}$.

(q_0, a, Z, q_0, aZ)
(q_0, a, a, q_0, aa)
$(q_0, b, a, q_0, \lambda)$
(q_0, b, Z, q_0, bZ)
(q_0, b, b, q_0, bb)
$(q_0, a, b, q_0, \lambda)$
$(q_0, \lambda, Z, q_0, \lambda)$

Príklad 4.6 *Navrhnite za pre jazyk zátvorkových výrazov.*

$(q_0, (, Z, q_0, (Z)$
$(q_0, (, (, q_0, (()$
$(q_0,), (, q_0, \lambda)$
$(q_0, \lambda, Z, q_0, \lambda)$

Príklad 4.7 *Navrhnite za pre jazyk* $L(M) = \{x \in \{a,b\}^*, N_a(x) > N_b(x)\}$.

Príklad 4.8 *Navrhnite za pre jazyk* $L(M) = \{xcx^R, x \in b^2a^2b^*a\}$.

Príklad 4.9 *Navrhnite za pre jazyk* $L(M) = \{x \in \{a,b\}^*, N_a(x) = 2.N_b(x)\}$.

Príklad 4.10 *Navrhnite za pre jazyk* $L(M) = \{a^n b^n c^m, n, m > 0\}$.

4.2 Vzťah zásobníkových automatov a bezkontextových gramatík

Príklad 4.11 *Zostrojte ZA jazykovo ekvivalentný s gramatikou:*
$S \to 0S1|01$

Po úprave na Greibachovej tvar: $S \to 0SJ|0J$
$J \to 1$

(q_0, λ, Z, q, S)
$(q, 0, S, q, SJ)$
$(q, 0, S, q, J)$
$(q, 1, J, q, \lambda)$

Príklad 4.12 *Zostrojte ZA jazykovo ekvivalentný s gramatikou:*
$S \to 0S0|1S1|c$

Po úprave na Greibachovej tvar: $S \to 0SN|1SJ|c$
$N \to 0$
$J \to 1$

(q_0, λ, Z, q, S)
$(q, 0, S, q, SN)$
$(q, 1, S, q, SJ)$
(q, c, S, q, λ)
$(q, 0, N, q, \lambda)$
$(q, 1, J, q, \lambda)$

Príklad 4.13 *Zostrojte ZA jazykovo ekvivalentný s gramatikou pre boolovské výrazy:*
$S \to 0|1|(S \wedge S)|(S \vee S)|\neg S$

Po úprave na Greibachovej tvar: $S \to 0|1|(SASP|(SBSP|\neg S$
$A \to \wedge$
$B \to \vee$
$P \to)$

(q_0, λ, Z, q, S)
$(q, 0, S, q, \lambda)$
$(q, 1, S, q, \lambda)$
$(q, (, S, q, SASP)$
$(q, (, S, q, SBSP)$
$(q, \neg, S, q, S)$
$(q, \wedge, A, q, \lambda)$
$(q, \vee, B, q, \lambda)$
$(q,), P, q, \lambda)$

Príklad 4.14 *Nájdite bezkontextovú gramatiku jazykovo ekvivalentnú so zásobníkovým automatom:*
$(q_1, 0, Z, q_1, N)$
$(q_1, 0, N, q_1, NN)$
$(q_1, 1, N, q_2, \lambda)$
$(q_2, 1, N, q_2, \lambda)$

	Po substitúcii mien neterminálov: $A = [q_1 Z q_1]$ $E = [q_1 N q_1]$ $B = [q_1 Z q_2]$ $F = [q_1 N q_2]$ $C = [q_2 Z q_1]$ $G = [q_2 N q_1]$ $D = [q_2 Z q_2]$ $H = [q_2 N q_2]$
$S \to [q_1 Z q_1] \mid [q_1 Z q_2]$	$S \to A \mid B$
$[q_1 Z q_1] \to 0\,[q_1 N q_1]$	$A \to 0E$
$[q_1 Z q_2] \to 0\,[q_1 N q_2]$	$B \to 0F$
$[q_1 N q_1] \to 0\,[q_1 N q_1]\,[q_1 N q_1] \mid 0\,[q_1 N q_2]\,[q_2 N q_1]$	$E \to 0EE \mid 0FG$
$[q_1 N q_2] \to 0\,[q_1 N q_1]\,[q_1 N q_2] \mid 0\,[q_1 N q_2]\,[q_2 N q_2]$	$F \to 0EF \mid 0FH$
$[q_1 N q_2] \to 1$	$F \to 1$
$[q_2 N q_2] \to 1$	$H \to 1$

Odstránenie neužitočných pravidiel:

$P_0 = \{F \to 1, H \to 1\}$	$N_0 = \{F, H\}$
$P_1 = P_0 \cup \{F \to 0FH, B \to 0F\}$	$N_1 = N_0 \cup \{B\}$
$P_2 = P_1 \cup \{S \to B\}$	$N_2 = N_1 \cup \{S\}$
$P_3 = P_2$	$N_3 = N_2$

Gramatika	Po zjednodušení
$S \to B$	$S \to 0F$
$B \to 0F$	$F \to 1 \vert 0F1$
$F \to 1 \vert 0FH$	$\Downarrow$
$H \to 1$	$S \to 01 \vert 0S1$

Príklad 4.15 *Nájdite bezkontextovú gramatiku jazykovo ekvivalentnú so zásobníkovým automatom:*
$(q, 0, Z, q, NZ)$
$(q, 1, Z, q, JZ)$
$(q, 0, N, q, NN)$
$(q, 1, N, q, \lambda)$
$(q, 1, J, q, JJ)$
$(q, 0, J, q, \lambda)$
$(q, \lambda, Z, q, \lambda)$

$S \to [qZq]$
$[qZq] \to 0\,[qNq]\,[qZq]$
$[qZq] \to 1\,[qJq]\,[qZq]$
$[qNq] \to 0\,[qNq]\,[qNq]$
$[qNq] \to 1$
$[qJq] \to 1\,[qJq]\,[qJq]$
$[qJq] \to 0$
$[qJq] \to \lambda$

Príklad 4.16 *Nájdite bezkontextovú gramatiku jazykovo ekvivalentnú so zásobníkovým automatom:*
$(q, (, Z, q, LZ)$
$(q, (, L, q, LL)$
$(q,), L, q, \lambda)$
$(q, \lambda, Z, q, \lambda)$

Príklad 4.17 *Nájdite bezkontextovú gramatiku jazykovo ekvivalentnú so zásobníkovým automatom:*
$(q_0, 0, Z, q_0, 0)$
$(q_0, 1, Z, q_0, 1)$
$(q_0, 0, 0, q_0, 00)$
$(q_0, 0, 1, q_0, 01)$
$(q_0, 1, 0, q_0, 10)$
$(q_0, 1, 1, q_0, 11)$
$(q_0, c, 0, q_1, 0)$
$(q_0, c, 1, q_1, 1)$
$(q_1, 0, 0, q_1, \lambda)$
$(q_1, 1, 1, q_1, \lambda)$